

ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΚΑΤΑ BAYES

Ας είναι $x_1, \dots, x_n$ από πληθυσμό με σπη ή σπ $f(x|\theta)$ όπου θ είναι της Θ , με ευ των $\pi(\theta)$ και ευ των υστερων (υποβίβεται) $\pi(\theta|x)$. Επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε τα σημεία q_1, q_2 που είναι τ/ω $P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha$. Υπάρχουν 2 τρόποι προσδιορισμού των q_1, q_2 . Ο πρώτος τρόπος έγκυται στην επιλογή των q_1, q_2 έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μήκος του δ.ε. Δηλαδή, το μήκος $l = q_2 - q_1$. Τότε λέμε συ θρίκαμε το δ.ε ελαχίστου μήκους. Αν η εύρεση δ.ε ελαχίστου μήκους είναι ανέφικτη τότε οδηγούμαστε στο δεύτερο τρόπο προσδιορισμού των q_1, q_2 που καταλήγει στο λειόμενο διαστήμα εμπιστοσύνης ίσων αρίων όπου τα q_1, q_2 προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$P_{\theta|x}(\theta \leq q_1) = \frac{\alpha}{2} \text{ και } P_{\theta|x}(\theta \geq q_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Παρατηρήσεις στην εύρεση δ.ε ελαχίστου μήκους:

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε των $l = q_2 - q_1$

1) Παραγωγίζονται ως προς q_1 :

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dq_2}{dq_1} = 1}$$

2) Παραγωγίζονται ως προς q_2 :

$$\frac{dl}{dq_2} = 1 - \frac{dq_1}{dq_2}$$

$$P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \Pi_{\theta|x}(q_2) - \Pi_{\theta|x}(q_1) = 1 - \alpha$$

Ας πάμε να εφαρμόσουμε των (1) και των παραγωγισιες ως προς q_1 (στη συνεχή περίπτωση)

$$\frac{d}{dq_1} (\Pi_{\theta|x}(q_2) - \Pi_{\theta|x}(q_1)) = 0 \Rightarrow \frac{d \Pi_{\theta|x}(q_2)}{dq_1} - \Pi_{\theta|x}(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d \Pi_{\theta|x}(q_2)}{dq_2} \cdot \frac{dq_2}{dq_1} - \Pi_{\theta|x}(q_1) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi(x)(q_2)}{dq_2} - \Pi(x)(q_1) = 0 \Rightarrow \Pi(x)(q_2) = \Pi(x)(q_1)$$

(ομοια και συν (2) πουρνουμε παλι το ιδιο).

Επισης, $\frac{d\ell}{dq_1} = \frac{\Pi(x)(q_1)}{\Pi(x)(q_2)} - 1 = \frac{\Pi(x)(q_1) - \Pi(x)(q_2)}{\Pi(x)(q_2)} > 0$

Το προσημο του $\frac{d\ell}{dq_1}$ εξαρτάται από τον αριθμητή

$$\Pi(x)(q_1) - \Pi(x)(q_2)$$

- Εστω $\Pi(x)(q_1) = \Pi(x)(q_2)$ φθίνουσα τότε καθώς $q_1 < q_2 \Rightarrow \Pi(x)(q_1) > \Pi(x)(q_2)$ τότε $\frac{d\ell}{dq_1} > 0 \Rightarrow \ell$ αυξουσα $\Rightarrow$ ελαχιστοποιείται ως προς q_1 στο κάτω άκρο του π.ο

- (Ξέρουμε ότι θα οδηγήσει σε λάθος)

Εστω $\Pi(x)(q_1) - \Pi(x)(q_2)$ αυξουσα τότε

καθώς $q_1 < q_2 \Rightarrow \Pi(x)(q_1) < \Pi(x)(q_2)$

τότε $\frac{d\ell}{dq_1} < 0 \Rightarrow \ell$ φθίνουσα $\Rightarrow$ ελαχιστοποιείται ως προς q_1 στο πάνω άκρο του π.ο (Αστοχό)

γιατί μας λέει ότι το q_1 είναι παραπάνω από το q_2 .

Όταν η $\Pi(x)$ είναι $\uparrow$ δεν παραχρυσίω ως προς q_1 αλλά θα δοθεί παραμύθιο ότι θα πρέπει να παραχρυσίω ως προς q_2

Παραχρυσίωση ως προς q_2 και παίρνω

$$\frac{d\ell}{dq_2} = \frac{\Pi(x)(q_1) - \Pi(x)(q_2)}{\Pi(x)(q_1)}$$

- Εστω η $\Pi(x)$ φθίνουσα συνεπώς του θ καθώς λοιπόν $q_1 < q_2 \Rightarrow \Pi(x)(q_1) > \Pi(x)(q_2) \Rightarrow \frac{d\ell}{dq_2} > 0$ δηλ. αυξουσα άρα ελαχιστοποιείται στο

στο κάτω άκρο του Π.Ο (ως προς q_2)

Όταν $\Pi_{\theta/x}$ φθίνουσα συνάρτηση δεν πρέπει να παραμύθισω ως προς q_2 αλλά όπως πριν ως προς q_1

• Έστω $\Pi_{\theta/x}$ αύξουσα συνάρτηση (ως προς θ)
 άρα $q_1 < q_2 \Rightarrow \Pi_{\theta/x}(q_1) < \Pi_{\theta/x}(q_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{d\ell}{dq_2} < 0 \Rightarrow$ φθίνουσα ελαχιστοποιείται ως προς το q_2 στο άνω άκρο του Π.Ο.

ΚΑΝΟΝΑΣ

Όταν $\Pi_{\theta/x}$ αύξουσα ως προς θ τότε παραμύθισω ως προς q_2

Όταν $\Pi_{\theta/x}$ φθίνουσα ως προς θ τότε παραμύθισω ως προς q_1

Άσκηση 1:

Ας είναι $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$

με $\pi(\theta) = \frac{k \cdot X_0^k}{\theta^{k+1}}$, $0 < X_0 < \theta < \infty$

Να προσδιορίσω ε.ε. ελαχίστου μίκας & ισών ορίων ΛΥΣΗ

$$\pi(\theta/x) = \frac{\pi(\theta) \cdot f(x|\theta)}{\int \pi(\theta) \cdot f(x|\theta) d\theta} = \frac{k \cdot X_0^k \cdot \theta^{-(k+1+n)}}{\int k \cdot X_0^k \cdot \theta^{-(k+1+n)} d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{-(k+1+n)}}{\int_{\max\{X_0, x_{(n)}\}}^{\infty} \theta^{-(k+1+n)} d\theta} = C \cdot \theta^{-(k+1+n)}, \quad T \leq \theta$$

$$\text{όπου } C = \frac{1}{\int_T^{\infty} \theta^{-(k+1+n)} d\theta}$$

$$A \in 100(1-\alpha)\%$$

$$a) P_{\theta|X}(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Pi_{\theta|X}(q_2) - \Pi_{\theta|X}(q_1) = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$l = q_2 - q_1$$

Παραγωγίζω ως προς q_1 ούσα $\Pi_{\theta|X} \downarrow$

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 \quad (2)$$

Από την (1) παραγωγίζοντας ως προς q_1 :

$$\frac{dq_2}{dq_1} \Pi_{\theta|X}(q_2) - \Pi_{\theta|X}(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\Pi_{\theta|X}(q_1)}{\Pi_{\theta|X}(q_2)} \quad (3)$$

Από την (3) η (2) δίνει:

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{\Pi_{\theta|X}(q_1) - \Pi_{\theta|X}(q_2)}{\Pi_{\theta|X}(q_2)} > 0 \quad (\text{αφού } \Pi_{\theta|X} \uparrow)$$

Ετσι, $q_1 = T$ (όσο κάτω άνω ελαχιστοποιείται)

Θα προσδιορίσω το q_2 έτσι ώστε:

$$P_{\theta|X}(T \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \int_T^{q_2} c \cdot \theta^{-(k+1+n)} d\theta = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \int_T^{q_2} \theta^{-(k+1+n)} d\theta = \frac{1}{c} \cdot (1 - \alpha) = \int_T^{+\infty} \theta^{-(k+1+n)} d\theta \cdot (1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow q_2 = T \cdot \alpha^{-\frac{1}{n+k}}$$

b) Προσδιορίσω το q_1 έτσι ώστε:

$$P_{\theta|X}(\theta \leq q_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \text{το } q_2 \text{ έτσι ώστε}$$

$$P_{\theta|X}(\theta \geq q_2) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P_{\theta|X}(\theta \leq q_1) = P_{\theta|X}(T \leq \theta \leq q_1) = \int_T^{q_1} c \cdot \theta^{-(n+k+1)} d\theta = \frac{\alpha}{2}$$

και

$$P_{\theta|X}(\theta \geq q_2) = \int_{q_2}^{\infty} c \cdot \theta^{-(n+k+1)} d\theta = \frac{\alpha}{2}$$

και μετά από υπολογισμούς:

$$q_1 = T \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n+k}} \quad \text{και} \quad q_2 = T \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n+k}}$$

Άσκηση 2

Έστω $X|\theta$ με σπη $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}$ $x \geq \theta$
 και $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta}$, $\theta > 0$ (X είναι μια T_h)

Λύση

$$\pi(\theta|x) = \frac{\theta \cdot e^{-\theta} \cdot e^{-x} \cdot e^{\theta}}{\int_0^x \theta \cdot e^{-\theta} \cdot e^{-x} \cdot e^{\theta} d\theta} = \frac{\theta}{\frac{\theta^2}{2} \Big|_0^x} = \frac{2\theta}{x}, 0 < \theta < x$$

$$P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = L - a \quad (1)$$

$$L = q_2 - q_1$$

$$\frac{dL}{dq_2} = 1 - \frac{dq_1}{dq_2} = \dots = 1 - \frac{\pi_{\theta|x}(q_2)}{\pi_{\theta|x}(q_1)} =$$

$$= \frac{\pi_{\theta|x}(q_1) - \pi_{\theta|x}(q_2)}{\pi_{\theta|x}(q_1)} < 0 \quad (\text{αφού } \pi(\theta|x) \uparrow)$$

$$\text{Έτσι, } \frac{dL}{dq_2} < 0 \Rightarrow L \text{ φθινύει ως προς } q_2$$

Άρα, ελαχιστοποιείται στο πάνω άκρο του PO
 $q_2 = X$.

Από τη σχέση (1)

$$P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq X) = L - a \Rightarrow$$

$$\int_{q_1}^X \frac{2\theta}{x^2} d\theta = L - a \Rightarrow 1 - \frac{q_1^2}{x^2} = L - a \Rightarrow q_1^2 = x^2 \cdot a$$

$$\Rightarrow q_1 = \sqrt{a} x \text{ ή } q_1 = -\sqrt{a} x$$

← από το $\pi(\theta)$.

Άσκηση 14 (ως εργασία από το βιβλίο)

(Μπορ. ορισμός του ευρωπαϊκού Bayes και το παραγοντικό θεωρήμα).